

## **BAB II**

### **TINJAUAN PUSTAKA**

#### **2.1 Teori Dasar**

##### **2.1.1 Teori Antrian**

Teori antrian pertama kali dikemukakan oleh A.K Erlang, seorang ahli matematika bangsa Denmark pada tahun 1910 dalam bukunya *Solution Of Some Problem In The Theory Of Probability Of Significance In Automatic Telephone Exchange*. Erlang melakukan eksperimen tentang fluktuasi telepon yang berhubungan dengan *automaticdialing equipment*, yaitu peralatan penyambungan telepon secara otomatis. Dalam waktu-waktu yang sibuk operator sangat kewalahan untuk melayani para penelpon secepatnya, sehingga para penelpon harus antri menunggu giliran. Persoalan aslinya Erlang hanya memperlakukan perhitungan keterlambatan (*delay*) dari seorang operator.

Kata Antrian dalam bahasa Inggris ialah *queueing* atau *waiting line*. Dalam setiap organisasi atau kegiatan yang berhubungan dengan pelayanan (*services*) dalam jumlah yang banyak selalu ditemukan bentuk barisan (*lines*) sebagai aturan untuk menunggu giliran mendapatkan pelayanan. Bentuk-bentuk menunggu dalam barisan dikenal sebagai istilah barisan antrean (*waiting lines*). (Kusumawardani, Sugito, & Rahmawati, 2014)

Sistem antrian adalah kedatangan pelanggan untuk mendapatkan pelayanan. Fenomena menunggu adalah hasil langsung dari keacakan dalam operasi sarana pelayanan.

Secara umum, kedatangan pelanggan dan waktu perbaikan tidak diketahui sebelumnya, karena jika dapat diketahui, pengoperasian sarana tersebut dapat dijadwalkan sedemikian rupa sehingga akan sepenuhnya menghilangkan keharusan untuk menunggu. Sistem antrian pada dasarnya terdiri atas tiga komponen utama, yaitu: (1) populasi sumber (*source population*) dan cara pelanggan memasuki sistem tersebut, (2) sistem pelayanan, (3) dan kondisi pelanggan saat keluar dari sistem (kembali ke populasi sumber atau tidak).

### **2.1.2 Faktor Sistem Antrian**

Terdapat faktor penting yang terkait erat dengan sistem antrian. Faktor-faktor yang berpengaruh terhadap kelancaran barisan antrian dan pelayanannya adalah sebagai berikut:

#### **1. Distribusi kedatangan**

Model antrian adalah model probabilistic karena unsur-unsur tertentu proses antrian yang dimasukkan dalam model adalah variabel random. Variabel random ini sering digambarkan dengan distribusi probabilitas.

Baik kedatangan maupun waktu pelayanan dalam suatu proses antrian pada umumnya dinyatakan sebagai variabel *random*. Asumsi yang biasa digunakan dalam kaitannya dengan distribusi kedatangan (banyaknya kedatangan per unit waktu) adalah Distribusi *Poisson*.

Rumus umum Distribusi Probabilitas *Poisson* adalah:

$$P_n = \frac{e^{-\lambda} \lambda^n}{n!}$$

Keterangan:

$P_n$  = Peluang bahwa ada  $x$  kedatangan dalam sistem

$\lambda$  =Tingkat kedatangan rata-rata

$e$  =Bilangan *navier* ( $e = 2,7183$ )

$n$  = Variabel acak diskrit yang menyatakan banyaknya kedatangan per interval waktu.

Distribusi *Poisson* adalah distribusi diskrit dengan rata-rata sama dengan varians. Suatu ciri menarik dari proses *poisson* adalah bahwa jika banyaknya kedatangan per satuan waktu mengikuti distribusi *poisson* dengan rata-rata tingkat kedatangan ( $\lambda$ ), maka waktu antar kedatangan akan mengikuti distribusi Eksponensial dengan rata-rata  $\frac{1}{\lambda}$ .

## 2. Distribusi Waktu Pelayanan

Waktu pelayanan dalam proses antrian dapat juga sesuai atau pas dengan salah satu bentuk distribusi probabilitas. Asumsi yang biasa digunakan bagidistribuai waktu pelayanan adalah distribusi eksponensial. Sehingga jika waktu pelayanan mengikutin distribusi eksponensial, maka tingkat pelayanan mengikuti distribusi *poisson*. Rumus umum fungsi densitas probabilitas eksponensial adalah:

$$f(x) = 1 - e^{-\mu x}$$

Keterangan:

$f(x)$  = Probabilitas yang berhubungan dengan x

$\mu$  = Rata-rata tiap pelayanan (unit pelayanan per unit waktu)

$e$  = Bilangan navier ( $e = 2,7183$ )

$x$  = Waktu pelayanan

### 3. Fasilitas pelayanan

Fasilitas pelayanan berkaitan erat dengan baris antrian yang akan dibentuk. Desain fasilitas pelayanan ini dapat dibagi menjadi tiga kelompok, yaitu:

- a. Bentuk *series*, dalam satu garis lurus ataupun garis melingkar
- b. Bentuk paralel, dalam beberapa garis lurus yang antara yang satu dengan yang lain paralel
- c. Bentuk *network station*, yang dapat didesain secara series dengan pelayanan lebih dari satu pada setiap stasiun. Bentuk ini dapat juga dilakukan secara paralel dengan stasiun yang berbeda-beda

### 4. Disiplin pelayanan

Disiplin pelayanan berkaitan erat dengan urutan pelayanan bagi pelanggan yang memasuki fasilitas pelayanan. Disiplin pelayanan terbagi empat bentuk, yaitu:

- a. Pertama datang, pertama dilayani (FCFS = *First Come First Service*)
- b. Terakhir datang, pertama kali dilayani (LCFS = *Last come first service*)
- c. Pelayanan dalam *random* order (SIRO = *Service In Random Order*)
- d. Prioritas pelayanan, yang berarti pelayanan dilakukan khusus pada pelanggan utama (*VIP customer*).

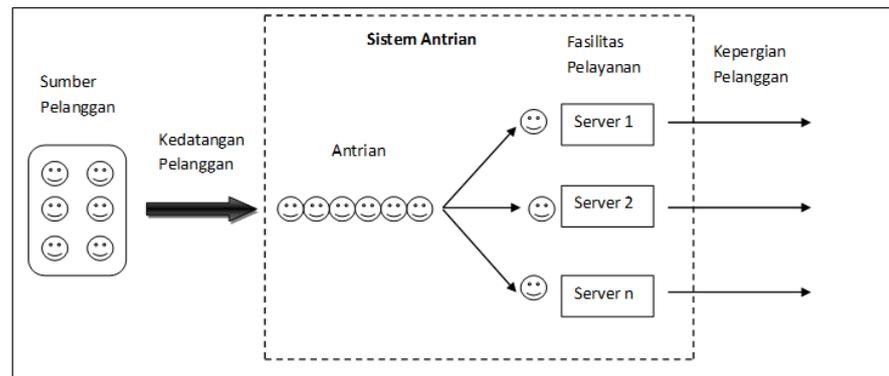
5. Ukuran Dalam Antrian

Besarnya antrian pelanggan yang akan memasuki fasilitas pelayanan pun perlu diperhatikan. Ada dua desain yang dapat dipilih untuk menentukan besarnya antrian, yaitu:

- a. Ukuran kedatangan secara tidak terbatas (*infinite queue*)
- b. Ukuran kedatangan secara terbatas (*finite queue*)

6. Sumber pemanggilan

Dalam fasilitas pelayanan, yang berperan sebagai sumber pemanggilan dapat berupa mesin maupun manusia. Bila ada sejumlah mesin yang rusak maka sumber pemanggilan akan berkurang dan tidak dapat melayani pelanggan. (Arum, Sugito, & Wilandari, 2014)



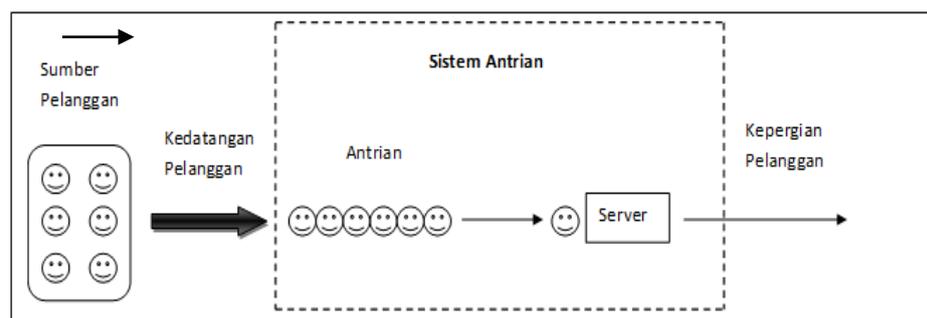
**Gambar 2.1** Contoh Sistem Antrian

### 2.1.3 Pola Antrian

Proses antrian secara umum dikategorikan menjadi empat struktur dasar menurut fasilitas pelayanan (Aminudin, 2005):

#### 1. *Single Channel Single Phase* ( Saluran Tunggal Tahap Tunggal )

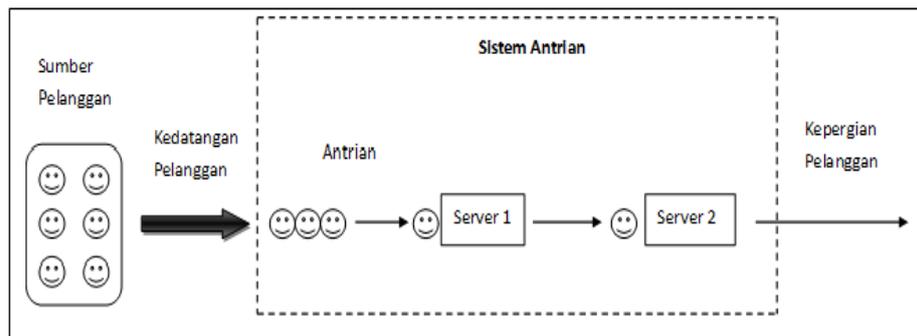
Sistem antrian satu saluran satu tahap berarti bahwa dalam tersebut hanya terdapat satu pemberi layanan serta satu jenis layanan yang diberikan, sehingga yangtelah menerima pelayanan dapat langsung keluar dari sistem antrian.



**Gambar 2.2** *Single Channel Single Phase*

#### 2. *Single Channel Multiple Phase* (Saluran Tunggal Tahap Berganda )

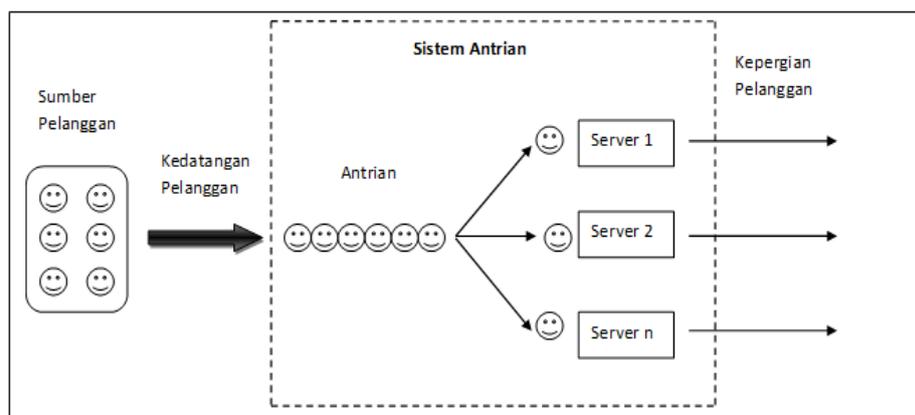
Sistem antrian satu saluran banyak tahap berarti dalam sistem antrian tersebut terdapat lebih dari satu jenis layanan yang diberikan, tetapi dalam setiap jenis layanan hanya terdapat satu pemberi layanan.



**Gambar 2.3** *Single Channel Multiple Phase*

### 3. *Multiple Channel Single Phase*

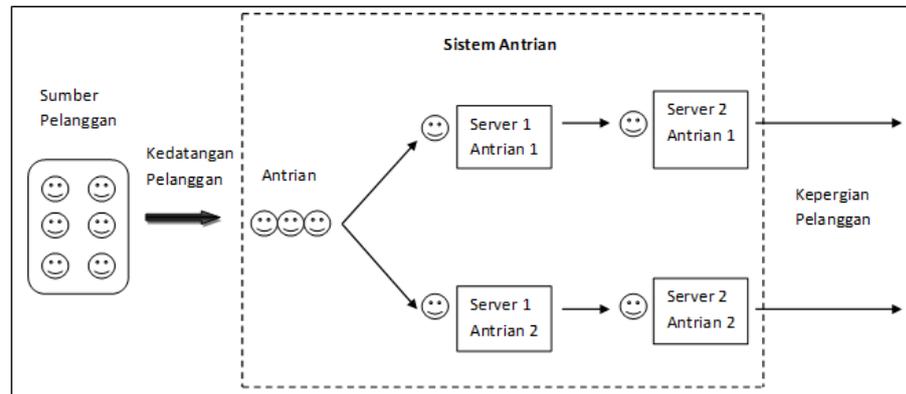
Sistem antrian banyak saluran satu tahap adalah sistem antrian dimana terdapat satu jenis layanan dalam sistem antrian tersebut, namun terdapat lebih dari satu pemberi layanan.



**Gambar 2.4** *Multiple Channel Single Phase*

### 4. *Multiple Channel Multiple Phase*

Sistem antrian banyak saluran banyak tahap adalah sistem antrian dimana terdapat lebih dari satu jenis layanan dan terdapat lebih dari satu pemberi layanan dalam setiap jenis layanan.



**Gambar 2.5** *Multiple Channel Multiple Phase*

#### 2.1.4 Model Antrian

Dengan mengoptimalkan sistem pelayanan, dapat ditentukan waktu pelayanan, jumlah saluran antrian, dan jumlah pelayanan yang tepat dengan menggunakan model-model antrian. Model antrian yang digunakan dalam penelitian ini adalah Model B: Model antrian jalur berganda (M/M/C).

Dalam model antrian jalur berganda sering dijumpai dua atau lebih jalur atau stasiun pelayanan yang tersedia untuk menangani pelanggan yang datang. Dengan asumsi pelanggan yang menunggu pelayanan membentuk satu jalur dan akan dilayani pada stasiun pelayanan yang tersedia pertama kali pada saat itu. Model antrian jalur berganda banyak ditemukan pada sebagian besar bank. Sebuah jalur umum dibuat, dan pelanggan yang berada dibarisanterdepan yang pertama kali dilayani oleh kasir.

Model antrian jalur berganda mengasumsikan bahwa pola kedatangan mengikuti distribusi Poisson dan waktu pelayanan mengikuti distribusi eksponensial negatif. Pelayanan dilakukan secara *frist-come, frist served*, dan semua stasiun pelayanan diasumsikan memiliki tingkat pelayanan yang sama. Asumsi lain yang terdapat dalam model jalur tunggal juga berlaku, walaupun

demikian persamaan ini digunakan dengan cara yang sama dan menghasilkan jenis informasi yang sama seperti model yang lebih sederhana.

Kondisi *steady state* terpenuhi apabila jumlah rata-rata pelanggan yang datang ( $\lambda$ ) tidak melebihi jumlah rata-rata pelanggan yang telah dilayani ( $\mu$ ), dengan kata lain  $\lambda < \mu$  atau  $\rho < 1$ . Berdasarkan informasi tersebut dapat dihitung ukuran-ukuran kinerja, yaitu jumlah pelanggan yang diperkirakan dalam sistem, jumlah pelanggan yang diperkirakan dalam antrian, waktu menunggu yang diperkirakan dalam sistem dan waktu menunggu yang diperkirakan dalam antrian (Arum, *et al.*, 2014:794).

Rumus untuk ukuran kinerja model B: jalur berganda dinyatakan pada rumus sebagai berikut:

$$\rho = \frac{\lambda}{c(\mu)}$$

**Rumus 2.1** Steady state ( $\rho$ )

Keterangan:

$\rho > 1$  = antrian akan terjadi

$\rho < 1$  = antrian tidak akan terjadi

$$P_0 = \frac{1}{\left[ \sum_{n=0}^{c-1} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} \right] + \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c}{c! \left(1 - \frac{\lambda}{c\mu}\right)}}$$

**Rumus 2.2** Rumus  $P_0$ 

$$L_s = \frac{\lambda \mu \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^M}{(c-1)!(c\mu-\lambda)^2} P_0 + \frac{\lambda}{\mu}$$

**Rumus 2.3** Rumus  $L_s$ 

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda}$$

**Rumus 2.4** Rumus  $W_s$ 

$$L_q = \frac{\lambda \mu \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^c}{(c-1)!(c\mu-\lambda)^2} P_0$$

**Rumus 2.5** Rumus  $L_q$ 

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda}$$

**Rumus 2.6** Rumus  $W_q$ 

Keterangan:

 $\rho$  = Kondisi steady state dalam sistem $P_0$  = Kondisi 0 pelanggan ( $P_0$ ) dalam sistem $L_s$  = Rata-rata jumlah kedatangan pelanggan dalam sistem $W_s$  = Rata-rata waktu kedatangan pelanggan dalam sistem $L_q$  = Rata-rata jumlah pelanggan yang menunggu dalam antrian $W_q$  = Rata-rata waktu pelayanan pelanggan dalam antrian $C$  = Jumlah server

$\lambda$  = Jumlah kedatangan rata-rata per satuan waktu

$\mu$  = Jumlah orang yang dilayani per satuan waktu

## 2.1.5 Distribusi *Poisson* dan Distribusi Eksponensial

### 2.1.5.1 Distribusi *Poisson*

Dalam teori probabilitas, distribusi *poisson* merupakan distribusi probabilitas diskrit yang menunjukkan probabilitas suatu kejadian pada periode tertentu (jika kejadian tersebut diketahui rata-ratanya) dan bebas satu sama lain. (Mussafi, 2015:143-144):

$$P_n = \frac{e^{-\lambda} \lambda^n}{n!} \quad \text{Rumus 2.7 Rumus Distribusi } Poisson$$

Keterangan:

$P_n$  = Peluang bahwa ada x kedatangan dalam sistem

$\lambda$  = Tingkat kedatangan rata-rata

$e$  = Bilangan *navier* ( $e = 2,7183$ )

$n$  = Variabel acak diskrit yang menyatakan banyaknya kedatangan per interval waktu

### 2.1.5.2 Distribusi Eksponensial

Waktu pelayanan dalam proses antrian dapat juga sesuai atau pas dengan salah satu bentuk distribusi probabilitas. Asumsi yang biasa digunakan bagi distribusi waktu pelayanan adalah distribusi eksponensial. Sehingga jika waktu pelayanan mengikuti distribusi eksponensial, maka

tingkat pelayanan mengikuti distribusi *poisson*. Rumus umum fungsi densitas probabilitas eksponensial adalah:

$$f(x) = 1 - e^{-\mu x} \quad \text{Rumus 2.8 Rumus Distribusi Eksponensial}$$

Keterangan:

$f(x)$  = Probabilitas yang berhubungan dengan t

$\mu$  = Rata-rata tiap pelayanan (unit pelayanan per unit waktu)

$e$  = Bilangan navier ( $e = 2,7183$ )

$x$  = Waktu pelayanan

## 2.2 Penelitian Terdahulu

Aulele (2014) membahas tentang analisis sistem antrian pada Bank Mandiri Cabang Ambon. Penelitian ini bertujuan untuk mendapatkan solusi terhadap kualitas pelayanan yang optimal, menggunakan model tingkat aspirasi dari manajemen Bank Mandiri Cabang Ambon terhadap peningkatan kualitas pelayanan kepada nasabah. Berdasarkan hasil penelitian diketahui bahwa waktu kedatangan nasabah dan waktu pelayanan pada Bank Mandiri Cabang Ambon berdistribusi eksponensial dan Jumlah teller yang optimal untuk melayani nasabah pada Bank Mandiri Cabang Ambon adalah 4 teller. Sehingga model antrian yang diperoleh adalah : (M/M/4) : (FIFO/ $\infty/\infty$ ). (Aulele, 2014)

Wahyudi (2012) membahas tentang Perancangan Sistem Simulasi Antrian Kendaraan Bermotor Pada Stasiun Pengisian Bahan-Bakar Umum (SPBU) yang menggunakan metode distribusi eksponensial. Penelitian ini bertujuan untuk melihat bagaimana sistem antrian pengisian bahan bakar yang dikhususkan pada

kendaraan roda empat keatas. Berdasarkan hasil penelitian diketahui bahwa dengan adanya tiga buah server pada SPBU Sunset Road dapat mengurangi jumlah antrian yang terjadi apabila dibandingkan dengan dua maupun satu server. Hal ini diambil berdasarkan pada perbandingan waktu kedatangan konsumen baru dengan waktu konsumen sebelumnya dilayani. (Wahyudi et al, 2012)

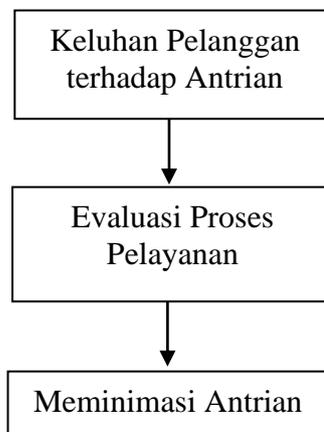
Ilin ( 2015 ) membahas tentang mengevaluasi proses suplai pada manifestasi Fair Trade (FT) di Novi Sad. Dalam kasus ini, kedatangan peserta pameran bersifat acak, yang dapat menyebabkan antrean panjang dan kemacetan. Model simulasi dibuat dalam MATLAB untuk mengevaluasi apakah manifestasi FT terlalu berlebihan dengan antrian selama proses pasokan. Menurut hasil yang diperoleh semua kendaraan yang masuk manifestasi dilayani tanpa perlu antrian yang panjang. (Ilin et al, 2015)

Daulay (2012) membahas tentang optimasi pelayanan perbankan di Bank Pekanbaru. Hasil dari penelitian ini menunjukkan perbedaan signifikan jumlah pelanggan, tidak terdapat perbedaan yang signifikan waktu tunggu, tidak terdapat perbedaan yang signifikan probabilitas, dan terdapat perbedaan yang signifikan utilitas dalam sistem maupun antrian dari *Split Desicion System*. Hasil penelitian ini menunjukkan bahwa penggunaan jumlah teller adalah 7 untuk transaksi < 25 juta rupiah dan 4 untuk transaksi > 25 juta rupiah dan 7 untuk transaksi < 20 juta dan 4 untuk transaksi > 20 juta pada setiap bank. (Daulay et al, 2012)

Anokye (2013) membahas tentang Aplikasi Teori Antrian untuk Lalu Lintas Kendaraan di Persimpangan Terwujud di Daerah Kumasi-Ashanti. Penelitian ini bertujuan untuk memodelkan arus lalu lintas kendaraan dan mengeksplorasi

bagaimana lalu lintas kendaraan dapat diminimalkan menggunakan teori antrian untuk mengurangi penundaan di jalan-jalan di kota Kumasi Ghana. Hasilnya menunjukkan bahwa intensitas lalu lintas,  $\rho < 1$  untuk semua sesi menunjukkan sistem lalu lintas yang sempurna dan adanya kelancaran arus lalu lintas dan setiap saluran mampu melayani lebih. (Anokye el al, 2013)

### 2.3 Kerangka Pemikiran



**Gambar 2.6** Kerangka Pemikiran